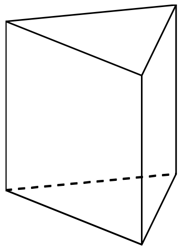
SSH探究Ⅰ（数学講座）

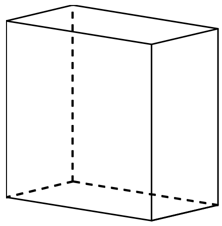
立方体や直方体，三角錐，四角柱などのように，

平面だけで囲まれた立体を　多面体　といいます。

これらの多面体は“へこみのない多面体”で　凸多面体

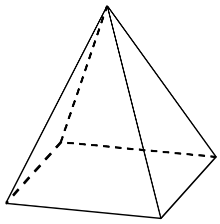
といいます。





その中から，今回の SSH 科学探究Ⅰ（数学講座）では中学校

でも学習した正多面体を作製してみましょう。

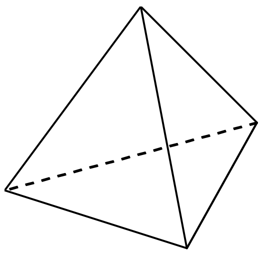


まず最初に正多面体について復習しましょう。

次の［1］，［2］を満たす凸多面体を正多面体といいます。

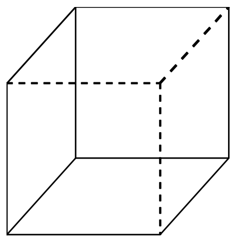
［1］　各面はすべて合同な正多角形である。

［2］　各頂点に集まる面の数はすべて等しい。



正多面体にはどのような種類があるのか

各面を正多角形に分類して考えてみましょう。



正三角形

正 4 面体，正 8 面体，正 20 面体

正四角形

正 6 面体（立方体）

正六角形

作れない

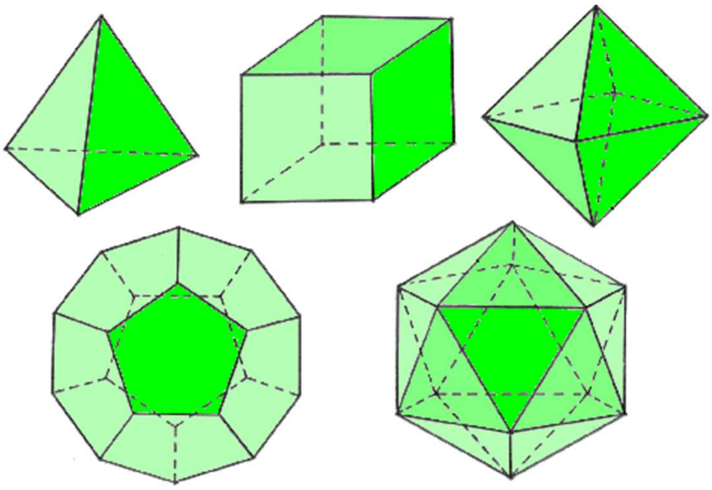
正五角形

正 12 面体

正七角形

作れない

なぜ正多面体は5種類しかないのか？



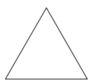
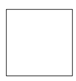
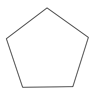
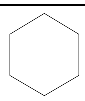
正多面体とは？

［1］ 各面はすべて合同な正多角形である。
［2］ 各頂点に集まる面の数はすべて等しい。

【準備】 ［ 確認用 正多角形セット ］から正多角形を切り取ってください。

正三角形（6 枚），正方形（4 枚），正五角形（4 枚），正六角形（3 枚）

～ 正多角形を貼り合せて多面体の頂点が作れるのは何枚までか調べよう ～

		2 枚	3 枚	4 枚	5 枚	6 枚
正三角形 (Equilateral Triangle)		×	○	○	○	×
正 方 形 (Square)		×	○	×	×	×
正五角形 (Pentagon)		×	○	×	×	×
正六角形 (Hexagon)		×	×	×	×	×

※ 多面体が作れるなら「○」，作れないなら「×」を記入して表の空欄を埋めよう！

正多角形を切り貼りすることにより，正多面体は 5 種類しかない存在しないことがわかります。

参考

「実験による証明」をしましたが，次に整数不等式による「数学的証明」にチャレンジしてみましょう！

※ 下の証明の下線部分の空欄を埋めて証明を完成させましょう。

【証明】

正多面体の各面を正 p 角形，正多面体の頂点に集まる面の数を q とする。

（ただし，p ，q は整数で $p \geqq 3$ ）

一般に p 角形の内角の和は　$(p-2)\times180^\circ$　なので，

正 p 角形の各頂点の内角は　$(p-2)\times180^\circ \,/\, p$　である。

正多面体の一つの頂点には，q 個の正 p 角形が集まるので，

この q 個分の角の和は　$\{(p-2)\times180^\circ\}\times q \,/\, p$

これは 360° よりも小さいから

（360° では平面になり，立体にならない。）

以下の不等式が成り立つ。

$$\{(p-2)\times180^\circ\}\times q \,/\, p < 360^\circ$$

この不等式を整理する。

両辺を 180° で割って　$(p-2)\times q \,/\, p < 2$

両辺に p を掛けて　$(p-2)\times q < 2p$

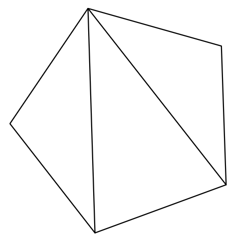
左辺に項を集めて　$pq-2p-2q < 0$

両辺に 4 を加えて　$pq-2p-2q+4 < 4$

因数分解すると　$(p-2)(q-2) < 4$

p 角形の一つの頂点と各頂点（隣り合う頂点は除く）を結ぶと（ $p-2$）個の三角形のができます。

例：正五角形の場合



一つの頂点から対角線が 2 本引けて（ 5−2 ）個の三角形ができる。

よって，内角の和は

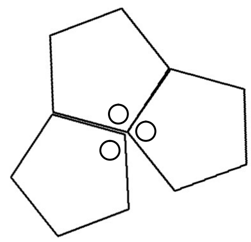
（ 5 − 2 ）× 180° ＝540°

また正五角形の各頂点の内角は

540° ／ 5 ＝ 108°

一つの頂点に 3 個集まると

108° × 3 ＝ 324°



複数文字があるので，1 つの文字に着目して因数分解しよう！

不等式　$(p-2)(q-2)<4$　を満たす整数 p ， q の組み合わせを考える。

・$p=3$（正三角形）のとき　q ＝ 3，4，5　で不等式が成り立つ。

・$p=4$（正　方　形）のとき　q ＝ 3　で不等式が成り立つ。

・$p=5$（正五角形）のとき　q ＝ 3　で不等式が成り立つ。

・$p=6$ 以上　　のとき　（$p-2$）が 4 以上となり不等式は成り立たない。

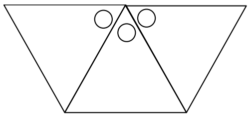
p ，q は
「 正多面体の各面を正 p 角形，
正多面体の頂点に集まる面の数を q 」
を表していることを確認しよう。

したがって，不等式を満たす

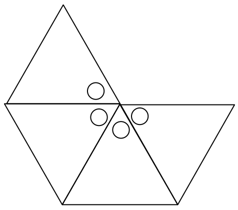
整数 p ， q の組み合わせ（ p ，q ）と

それに対応する正多面体　は

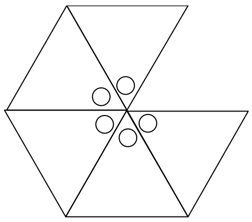
（ 3 ， 3 ）: 1 つの頂点に 正三角形 が 3 個　・・・　正 4 面体



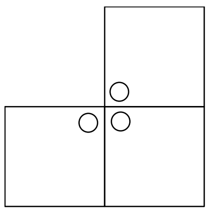
（ 3 ， 4 ）: 1 つの頂点に 正三角形 が 4 個　・・・　正 8 面体



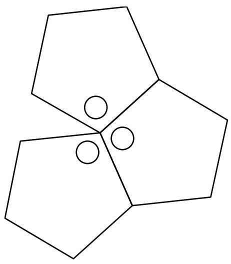
（ 3 ， 5 ）: 1 つの頂点に 正三角形 が 5 個　・・・　正 20 面体



（ 4 ， 3 ）: 1 つの頂点に 正 方 形 が 3 個　・・・　正 6 面体



（ 5 ， 3 ）: 1 つの頂点に 正五角形 が 3 個　・・・　正 12 面体

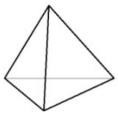
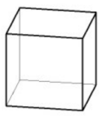
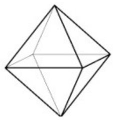
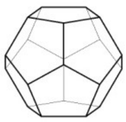


結果が「実験による証明」と同じになることを確認しよう！

正多面体の面・頂点・辺

これから実際に正多面体を作製します。
でもその前に，頭の中でこれらの正多面体をイメージして，下の表を完成させましょう。

～ 正多面体の面・頂点・辺の数を考えてみよう ～

		面の数	頂点の数	辺の数
正 4 面体 (Tetrahedron)		4	4	6
正 6 面体 (Hexahedron) (立方体：Cube)		6	8	12
正 8 面体 (Octahedron)		8	6	12
正 12 面体 (Dodecahedron)		12	20	30
正 20 面体 (Icosahedron)		20	12	30

※ 正多面体をイメージして空欄に数を記入し，表を埋めてみよう。

この表からわかることがあれば書いてみよう。
また、これらの正多面体を作製しながら間違った部分は修正しましょう。

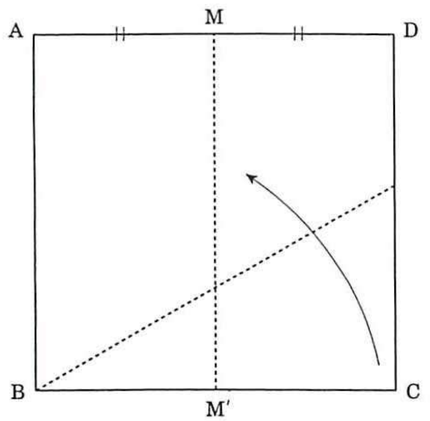
・正多面体の双対：正多面体の双対、あるいは双対関係にある正多面体とは、与えられた正多面体の各面の中心（面心）に頂点を取り、それらを結んで造られる立体（これも正多面体）のこと。双対の双対はもとの正多面体と相似になる。

①正 4 面体⇔正 4 面体（自己双対）、②正 6 面体⇔正 8 面体、③正 12 面体⇔正 20 面体

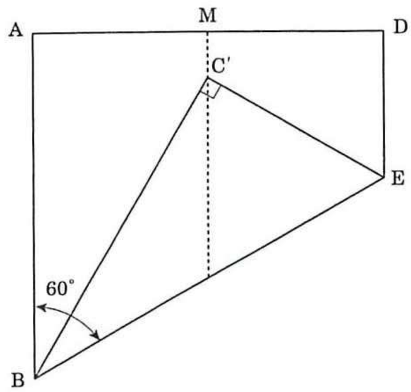
・オイラーの多面体定理：穴の開いていない多面体、すなわち球面に位相同型な多面体については、頂点、辺、面の数について ［ (頂点の数) ― (辺の数) ＋ (面の数) ＝ 2 ］が成り立つ。

正４面体を作ろう！

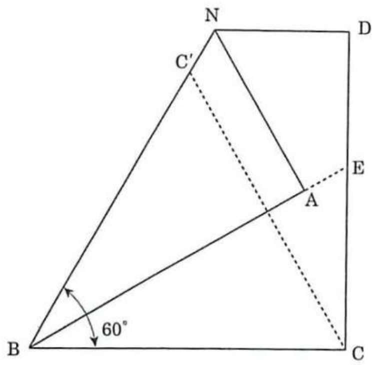
1. パーツ（正三角形）の作り方



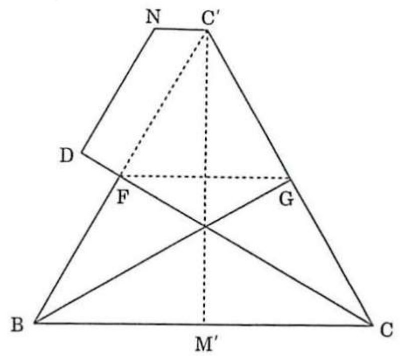
① 正方形 ABCD を 2 つに折り，
C を MM' 上に重ねる。



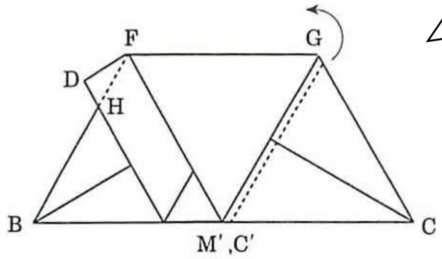
② BC をもとに戻し，AB を BE
線上に重なるように折る。



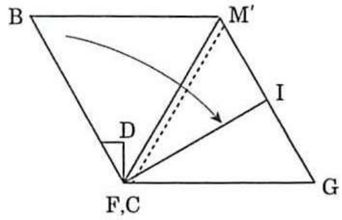
③ CC' を折る。



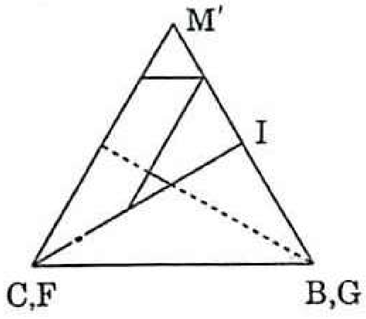
④ C' を M' に重ねるように折る。



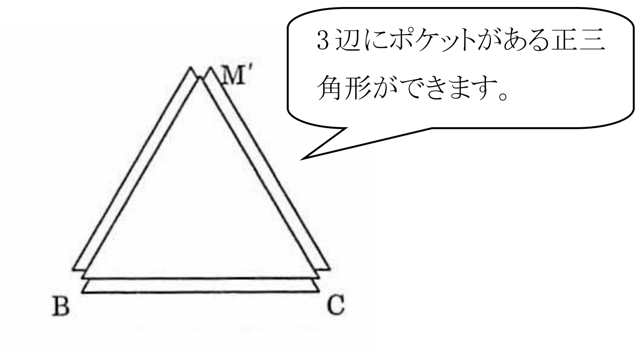
⑤ △DHF を裏へ折る。
△GM'C を裏へ折る。



⑥ 裏返して，M'F を折り，

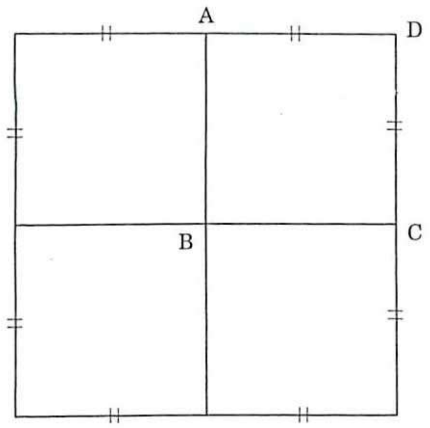


⑦ B を FI の中に入れる。



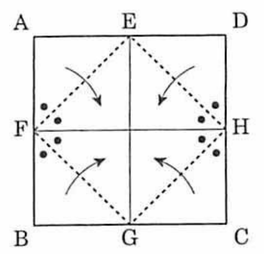
⑧ 表に返す。完成！

2. つぎ手（辺）の作り方

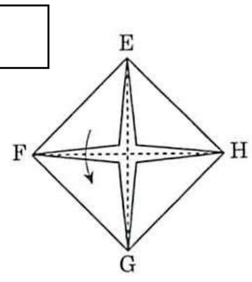


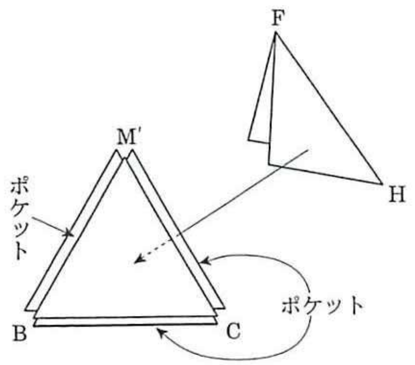
① パーツを作った同じ大きさの正方形を４つに分けて切る。

② 切り取った四角形の４つの角を中心に集め，面積が半分の正方形を作る。



③ FH で折る。





④ この三角形をポケットに入れればつぎ手となります。

正三角形のパーツ4枚とつぎ手6枚で正4面体を作ろう！